実2次体の岩澤λ-不変量について(代数的数論 : 最近の進展とその背景)

田谷, 久雄

数理解析研究所講究録
第 844 巻 1993 年 39-49

実 2 次体の岩澤 λ- 不変量について

早稲田大学・理工学部　田谷 久雄 (Hisao Taya)

§1　序

有限次代数体 k と素数 p に対して、k の Galois 拡大 K が p- 進整数環 $\mathbf{Z}_p$ の加法群と位相同型な Galois 群を持つ時、この Galois 拡大 K/k を $\mathbf{Z}_p$- 拡大と呼ぶ。特に k に 1 の p-冪乗根全体を添加した体に含まれる $\mathbf{Z}_p$- 拡大を円分的 $\mathbf{Z}_p$- 拡大と呼ぶ。任意の整数 $n \geq 0$ に対して、$\mathbf{Z}_p$- 拡大 K/k は k 上 p^n 次の巡回拡大となる中間体 k_n を唯一つ持ち、かつ、K/k の中間体はこれらに限られる。k_n のイデアル類群の p-Sylow 部分群の位数を p^{e_n} で表す時、岩澤氏 [8] は次の定理を示した。

<u>定理 (岩澤).</u> $\mathbf{Z}_p$- 拡大 K/k と素数 p のみで定まる整数 $\lambda = \lambda_p(K/k)$, $\mu = \mu_p(K/k)$, $\nu = \nu_p(K/k)$ が存在し、十分大きなすべての整数 $n \geq 0$ に対して、$e_n = \lambda n + \mu p^n + \nu$ となる。

これらの定数 λ, μ, ν を K/k の p に対する岩澤不変量と呼ぶ。特に、円分的 $\mathbf{Z}_p$- 拡大に対しては $\lambda_p(k), \mu_p(k), \nu_p(k)$ と書くことにする。$\mathbf{Z}_p$- 拡大 K/k に対してこれらの不変量を調べることは重要であり、Greenberg 氏は [7] において次の問題を提起した。これは現在 Greenberg 予想と呼ばれている。

<u>**予想 (Greenberg).**</u> k が総実代数体ならば、$\lambda_p(k) = \mu_p(k) = 0$ である。

岩澤 μ- 不変量については、Ferrero 氏と Washington 氏 [1] によって、k がアーベル体ならば $\mu_p(k) = 0$ であることが示され、岩澤 λ- 不変量の minus-part については、木田

の公式を始めさまざまな研究がなされてきたが、岩澤 λ- 不変量の plus-part に関する Greenberg 予想は、k が実２次体の時ですらいまだ未解決である。本稿では、k が実２次体で奇素数 p が k で分解する場合について、Greenberg 予想の検証を行なうことを目的とする。

§2　実２次体の新しい不変量

k を類数が h の実２次体、ε をその基本単数、p を k で分解する奇素数とし、その k での分解を $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ $(\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}')$ とする。この時、k の元 α で $\mathfrak{p}'^h = (\alpha)$ を満足するものが存在する。福田氏と小松氏は Greenberg[7] の方法を整理し、

$$\mathfrak{p}^{n_1} || (\alpha^{p-1} - 1) \;\; \text{及び} \;\; \mathfrak{p}^{n_2} || (\varepsilon^{p-1} - 1)$$

で定数 n_1, n_2 を定義した。ここで α の選び方は一意的でないが、$1 \leq n_1 \leq n_2$ の下で、(n_1, n_2) の組は k と p に対して一意的に定まる。

これらの定数を用いて、次のような場合について Greenberg 予想をサポートする結果が得られている。

(a) $n_1 = 1$ の場合 (福田－小松 [4])

(b) $n_1 < n_2$ の場合 (福田－小松 [4],[5])

(c) $n_1 = n_2 = 2$ の場合 (福田 [5], 福田－小松－和田 [6])

ここでは、福田氏の方法 [2] を更に整理して、$n_1 = n_2 \geq 2$ の場合も含め、一般的に $n_2 \geq 2$ の場合について考察をしてゆく。

円分的 $\mathbf{Z}_p$- 拡大

$$k = k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset \cdots \subset k_n \subset \cdots \subset k_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} k_n$$

に対して、A_n を k_n のイデアル類群の p-Sylow 部分群、D_n を p 上の素イデアルの積を含むイデアル類からなる A_n の部分群、$\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}'_n$ をそれぞれ $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ の上の k_n の唯一つの素イデアルとする。この時、$cl(\mathfrak{p}_n)$ で $\mathfrak{p}_n$ を含むイデアル類を表せば、

$$D_n = < cl(\mathfrak{p}_n) > \cap A_n \quad : \quad \text{巡回群}$$

となる。この部分群 D_n の位数は、Greenberg 予想と密接な関係があることが知られている (参照 [7])。以下、$A_0 = 1$、$n_2 \geq 2$ を仮定し、上述の定数 n_1, n_2 の類似物を定義する。

まず $r \geq 0$ を固定し、この r に対して D_r の位数を p^j とする。この時、k_r の元 α_r で $\mathfrak{p}'^{\,hp^j}_r = (\alpha_r)$ を満足するものが存在する。

<u>定義.</u> $N_{r,0}$ を k_r から k へのノルム写像とする時、

$$\mathfrak{p}^{m_r} || (N_{r,0}(\alpha_r)^{p-1} - 1) \quad \text{in } k$$

で定数 m_r を定義する。ここで α_r の選び方は一意的でないが、$r+1 \leq m_r \leq r + n_2 - j$ の下で、m_r は k_r/k と p に対して一意的に定まる新しい不変量となる。

特に、$r = 0$ とおけば $m_0 = n_1$ となることに注意する。この定数 m_r は、$\mathbf{Z}_p$- 拡大のより高い次数の中間体のイデアル類群の部分群 D_n の大きさを記述するのに役立つ。つまり、次の定理が成り立つ。

<u>定理 1.</u> 任意の整数 $n \geq 0$ に対して A_n が巡回群、かつ、$A_0 = 1$ で、ある固定された整数 $r \geq 0$ に対して $|D_r| = p^j$ とする。この時、次が成り立つ。

(1) $1 \leq s \leq n_2 - 1 - j$ とする時、$m_r = r + s$ となるための必要十分条件は、$|D_{r+s}| = p^{j+1}$、かつ、$|D_{r+s-1}| = \cdots = |D_r| = p^j$ となること。

(2) $m_r = r + n_2 - j$ となるための必要十分条件は、$|D_{r+n_2-j-1}| = \cdots = |D_r| = p^j$ となること。

この定理の証明は、イデアル類群の細分化を行うことによってなされる。

円分的 $\mathbf{Z}_p$– 拡大 k_∞/k に対して、その Galois 群 $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_\infty/k)$ の位相的生成元を σ とし、$\sigma_r = \sigma^{p^r}$ とおく。つまり、$\mathrm{Gal}(k_\infty/k_r) = \overline{<\sigma_r>}$ である。そこで、

$$A_n^{\Gamma_r} = \{a \in A_n |\ a^{\sigma_r} = a\}$$

とおくと、

$$D_n \subset A_n^{\Gamma} = A_n^{\Gamma_0} \subset A_n^{\Gamma_1} \subset A_n^{\Gamma_2} \subset \cdots \subset A_n^{\Gamma_n} = A_n$$

となる。この細分化されたイデアル類群の列に対して、Genus Formula [13] を適用すると次の補題が得られる。

<u>補題 1.</u> 任意の整数 $n \geq 0$ に対して A_n が巡回群、かつ、$A_0 = 1$ で、ある固定された整数 $r \geq 0$ に対して $|D_r| = p^j$ とする。この時、$0 \leq t \leq n_2 - j - 1$ なる任意の整数 t に対して $A_{r+t} = A_{r+t}^{\Gamma_r}$ となる。

この補題1を用いれば、m_r の定義、Hasse のノルム定理、及び、イデアル版の Hilbert の定理 90 より定理1を示すことができる。

§3　実2次体の岩澤 λ– 不変量への応用

§2で述べた定理1を適用することにより、実2次体 k で奇素数 p が分解している場合について、Greenberg 予想の判定条件を与えることができる。まず、次の一般的な場合に関する補題が示せる。

<u>補題 2.</u> K と p を Leopoldt 予想が成立するような総実代数体と素数の組とし、p の上の k の素イデアルは $\mathbf{Z}_p$– 拡大 K_∞/K で完全分岐、かつ、任意の整数 $n \geq 0$ に対して $A_n(K)$ は巡回群であるとする。この時、ある一つの $r \geq 0$ に対して $|D_r(K)| \neq 1$ ならば $\lambda_p(K) =$

$\mu_p(K)=0$ となる。ここで、$A_n(K)$、$D_r(K)$ は K に対応する A_n、D_r と同様な群とする。

この補題によって、A_n が巡回群の場合に岩澤不変量を考察するには、ある固定された $r\geq 0$ に対して $|D_r|=1$ となってしまう場合のみを扱えば良いことが分かる。

ζ_p を 1 の原始 p 乗根、$k^*=k(\zeta_p)$、$(k^*)^+$ を k^* の最大実部分体、$\lambda_p^-(k^*)=\lambda_p(k^*)-\lambda_p((k^*)^+)$ とし、更に、A_0^* で k^* のイデアル類群の p-Sylow 部分群を表すものとする。この時、定理 1 と補題 2 から直ちに次の定理が得られる。この定理 2 の仮定 (3) からは、任意の整数 $n\geq 0$ 対して A_n が巡回群であることが従うことを注意しておく。

定理 2. k を実 2 次体、p を k で分解する奇素数とし、

(1) $n_2\geq 2$

(2) $A_0=1$

(3) $\lambda_p^-(k^*)=1$ (または、A_0^* が基本 p-アーベル群)

(4) ある固定された $r\geq 0$ に対して $|D_r|=1$

とする。この時、$m_r\neq r+n_2$ ならば $\lambda_p(k)=\mu_p(k)=0$ となる。更に、n_0 を $A_n^\Gamma=D_n$ を満たす最小の自然数とすれば、$\nu_p(k)=\log_p|A_{n_0}|$ となる。

ここで、この定理について、いくつかの注意を与える。まず、$n_2=1$ の場合には、福田－小松の定理により、仮定 (2) の下で $\lambda_p(k)=\mu_p(k)=0$ であることが分かっている。仮定 (2),(3) は実 2 次体 k を与えれば、有限個の p を除いて成立している。結論の一つである $\mu_p(k)=0$ は Ferrero–Washington の定理から従うが、仮定 (3) において、「A_0^* が基本 p-アーベル群」をとれば、Ferrero–Washington の定理とは独立に $\mu_p(k)=0$ が得られる (参照 福田－小松 [5])。また、定理 1 より、仮定 (3) の下では

$$D_{n_1-1}=\cdots=D_1=D_0=1$$

となるので、仮定 (4) は $r \leq n_1 - 1$ の下で常に成立している。特に $n_1 = n_2 \geq 2$ の場合には、$r = 1$ と取れば仮定 (4) は常に成立していることになる。(逆に言えば、この場合には、補題 2 から直ちに $\lambda_p(k) = \mu_p(k) = 0$ を示すことができないことになる。) 最後に、この定理を $r = 0$ に対して適用すれば、次の系が得られる。

<u>系 (福田－小松).</u> k を実 2 次体、p を k で分解する奇素数とする時、

(1) $n_1 \neq n_2$ (すなわち、$1 \leq n_1 < n_2$)

(2) $A_0 = 1$

(3) $\lambda_p^-(k^*) = 1$ (または、A_0^* が基本 p－アーベル群)

ならば、$\lambda_p(k) = \mu_p(k) = 0$ となる。

<u>注意.</u> 隅田氏 [11] が示した実 2 次体についての Greenberg 予想に対する次の同値条件と上の定理との関係について述べておく。

<u>定理 (隅田).</u> k を実 2 次体、p を k で分解する奇素数とする。${A'}_n^{\Gamma} \neq 1$ の時、$\lambda_p(k) = \mu_p(k) = 0$ となるための必要十分条件は次の通り。

(I) 十分大きな整数 $n \geq 0$ に対して、A'_0 の各類は k_n で単項化する。

(II) 十分大きな整数 $n \geq 0$ について、$|D_n| > |A_n^{\Gamma}|/|{A'}_n^{\Gamma}|$ である。

(III) 十分大きな整数 $n \geq 0$ について、${A'}_n^{\Gamma}$ は巡回群である。

ここで、${A'}_n, {A'}_n^{\Gamma}$ は、O_n を k_n の普通の整数環とする時、p－整数環 $O_n[\frac{1}{p}]$ に関するイデアル類群、つまり、p－イデアル類群と、その Γ－不変な部分群である。

定理 2 の仮定 (2) からこの定理の条件 (I) が、定理 2 の仮定 (3) からこの定理の条件 (III) が従う。つまり、条件 (I), (III) が成立している場合に、(II) の条件が成り立つか否かを、$\mathbf{Z}_p$－拡大 k_∞/k のなるべく小さい次数の中間体の情報から判定しようというのが定理 2 の結果ということになる。

この隅田の定理によって、今までの結果が見通しの良いものとなり、岩澤 λ- 不変量の振る舞いの一要因が明らかになった。しかしながら、条件 (I) は分岐している拡大についての単項化問題であり、条件 (III) は、自明な場合を除いて、その成立の因果関係が全く分かっていないので、実 2 次体についても Greenberg 予想を判定することは非常に難しい問題と言わざるを得ない。

§4 いくつかの新しい実例

$p=3$ とすると、実 2 次体 k の円分的 $\mathbf{Z}_p$- 拡大体の第一段目の中間体 k_1 は $\mathbf{Q}$ 上 6 次の実巡回拡大体となる。従って、Mäki 氏 [9] の方法を用いれば、k_1 の単数群を決定することができる。この結果から実際に単項イデアルの生成元 α_1 を求めることができ、そのノルムの $p-1$ 乗を p- 進展開することによって、§2 で定義した m_1 の計算が可能となる。そこで、この不変量 m_1 を計算することによって、定理 2 を適用し、Greenbreg 予想が成立するような新しい実例を以下に与える。なお、この例における $\lambda_3^-(k^*)$ の値は、福田氏の作成した表 [3] に基づいている。

<u>例 1.</u> $k=\mathbf{Q}(\sqrt{8965}),\ p=3$ の時、

$$n_1=n_2=3,\ h=2,\ A_0^*\simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z},\ \lambda_3^-(k^*)=1$$

となり、定理 2 の仮定を満足する。$\theta=2\cos(\frac{2\pi}{9}),\ \theta'=2\cos(\frac{4\pi}{9}),\ \omega=\dfrac{1+\sqrt{8965}}{2}$ とおくと、$k_1=\mathbf{Q}(\sqrt{8965},\theta)$ の整数基は $\{1,\theta,\theta',\omega,\theta\omega,\theta'\omega\}$ となる。そこで、この整数基に基づいて α_1 の整係数を表示すれば、

$$\alpha_1=(-1885431,1396449,-745160,-40251,29812,-15908)$$

となり、$N_{1,0}(\alpha_1)=-723897967519-15454088423\omega$ を得る。従って、これより $N_{1,0}(\alpha_1)^2$

の 3 − 進展開を行えば、$m_1 = 3 \neq 1 + n_2$ となるので、定理 2 から

$$\lambda_3(\mathbf{Q}(\sqrt{8965})) = \mu_3(\mathbf{Q}(\sqrt{8965})) = 0$$

が従う。

<u>例 2.</u> $k = \mathbf{Q}(\sqrt{9895}), p = 3$ の時、

$$n_1 = n_2 = 3,\ h = 10,\ A_0^* \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z},\ \lambda_3^-(k^*) = 1$$

となり、定理 2 の仮定を満足する。θ と θ' を例 1 と同様にとると、$k_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{9895}, \theta)$ の整数基は $\{1, \theta, \theta', \sqrt{9895}, \theta\sqrt{9895}, \theta'\sqrt{9895}\}$ となる。そこで、この整数基に基づいて α_1 の整係数を表示すれば、

$$\begin{aligned}\alpha_1 = (&-1513770792210720, -1721150440844392, -1123259858067648, \\ &-15214581474912, -17303858617639, -11295712141401)\end{aligned}$$

となり、$N_{1,0}(\alpha_1) = -27577936688 - 277238711\sqrt{9895}$ を得る。これより同様にして $m_1 = 3 \neq 1 + n_2$ となるので、定理 2 より

$$\lambda_3(\mathbf{Q}(\sqrt{9895})) = \mu_3(\mathbf{Q}(\sqrt{9895})) = 0$$

が従う。

同様にして、$n_1 = n_2 \geq 4$ となる実 2 次体の実例も与えることができる。

§5 (n_1, n_2) の現れる割合の予測

実二次体 k と k で分解する奇素数 p を与えると、定数の組 (n_1, n_2) が決まる。これらの定数は 2 次の代数的整数 α^{p-1}, ε^{p-1} の p − 進展開から定まる訳であるが、与えられた数の組を値に取るような (n_1, n_2) がどのくらい存在するかは分かっていない。そこで、これら

の 2 次の代数的整数の p− 進展開において、その係数が p を法として、実二次体 k を変えるごとに、random に現れるものと仮定して、その個数を予測してみる。つまり、α^{p-1} や ε^{p-1} の p− 進展開を

$$\alpha^{p-1} \text{ or } \varepsilon^{p-1} = 1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots$$

とする時、各 a_i には $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の元が $\dfrac{1}{p}$ の確率で現れるものと仮定するのである。この時、次が成り立つ。

予測. 上記の仮定の下で、

(1) $n_1 = n_2 = l$ となる (n_1, n_2) は、$\dfrac{p-1}{p^{2l-1}}$ の割合で現れる。

(2) $n_1 < n_2$ となる (n_1, n_2) は、$\dfrac{(p-1)^2}{p^{n_1+n_2}}$ の割合で現れる。

さて、この予想と実際に現れる (n_1, n_2) の個数を実験的に比較すると、次のようになる。

実験 1. $p = 3$, $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ とする。$m < 100,000$ に対して、$p = 3$ が分解している実二次体の数は 22794 個で、次の表 1 のような結果となる。

表 1. $p = 3$, $m < 100,000$ の時

(n_1, n_2)	実際の個数	予測の個数
(1 , 1)	15713	15196
(1 , 2)	3171	3377
(2 , 2)	1591	1688
(1 , 3)	1067	1126
(2 , 3)	361	375
(3 , 3)	174	188
(1 , 4)	321	375
(2 , 4)	91	125
(3 , 4)	54	42
(4 , 4)	29	21

実験 2. $p = 5$, $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ とする。$m < 100,000$ に対して、$p = 5$ が分解している実二次体の数は 25329 個で、次の表 2 のような結果となる。

表 2. $p=5$, $m<100,000$ の時

(n_1,n_2)	実際の個数	予測の個数
(1 , 1)	20391	20263
(1 , 2)	3153	3242
(2 , 2)	773	811
(1 , 3)	662	648
(2 , 3)	140	130
(3 , 3)	30	32
(1 , 4)	118	130
(2 , 4)	25	26
(3 , 4)	3	5
(4 , 4)	0	1

これらの実験結果から、大方予測通りの個数が実際に現れていることが分かる。つまり、大部分の実 2 次体は、福田－小松の定理から Greenberg 予想の成立が確かめられることになる。しかしながら、現時点では、与えられた数の組を値に取るような (n_1,n_2) が無数に存在するか否かすら分かっていない。従って、任意の奇素数 p に対して $\lambda_p(k)=\mu_p(k)=0$ となる実二次体 k が無数に存在するか否かは、この方向からは分からないということになる。ところで、中川氏と堀江氏 [10] によって、類数が 3 で割れず、かつ、3 が不分解な実二次体が無数に存在することが示されており、この系として、特に $p=3$ の場合には、$\lambda_3(k)=\mu_3(k)=\nu_3(k)=0$ となる実二次体 k が無数に存在することが知られていることを注意しておく。

参考文献

[1] B. Ferrero and L. C. Washington : The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, *Ann. of Math.*, **109** (1979), 377–395.

[2] T. Fukuda : Iwasawa λ-invariants of certain real quadratic fields, *Proc. Japan Acad.*, **65**A (1989), 260–262.

[3] T. Fukuda : 虚 2 次体の岩澤 λ- 不変量 (unpublished).

[4] T. Fukuda and K. Komatsu : On the λ invariants of $\mathbf{Z}_p$-extensions of real quadratic fields, *J. Number Theory*, **23** (1986), 238–242.

[5] T. Fukuda and K. Komatsu : On $\mathbf{Z}_p$-extensions of real quadratic fields, *J. Math. Soc. Japan*, **38** (1986), 95–102.

[6] T. Fukuda, K. Komatsu and H. Wada : A remark on the λ-invariants of real quadratic fields, *Proc. Japan Acad.*, **62**A (1986), 318–319.

[7] R. Greenberg : On the Iwasawa invariants of totally real fields, *Amer. J. Math.*, **98** (1976), 263–284.

[8] K. Iwasawa : On Γ-extensions of algebraic number fields, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65** (1959), 183–226.

[9] S. Mäki : *The determination of units in real cyclic sextic fields, in* Lecture Notes in Math. 797. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1980).

[10] J. Nakagawa and K. Horie : Elliptic curves with no rational points, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104** (1988), 20–24.

[11] H. Sumida : Greenberg 予想について, 本講究録掲載.

[12] H. Taya : On the Iwasawa λ-invariants of real quadratic fields, to appear in *Tokyo J. Math.*, **16**.

[13] H. Yokoi : On the class number of a relatively cyclic number field, *Nagoya Math. J.*, **29** (1967), 31–44.

[14] L. C. Washington : *Introduction to Cyclotomic Fields*, in G.T.M.83. Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1982).